超曲面上のある代数的サイクルについて

AUTHOR(S):

青木, 昇

CITATION:

青木, 昇. 超曲面上のある代数的サイクルについて. 代数幾何学シンポジューム記録 1987, 1987: 261-282

ISSUE DATE:

1987

URL:

http://hdl.handle.net/2433/212661

超曲面上のある代数的サイクルについて

立教大・理　　青木 昇

§0. Introduction

X を体 k 上定義された $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の非特異超曲面とし、$f=0$ をその定義方程式とする。n が偶数のとき $n=2r$、奇数のとき $n=2r-1$ とおくとき、f が次の分解を持つ場合を考える：

(0.1) $\qquad f = f_0 g_0 + f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r$

このとき、Y を $f_0 = f_1 = \cdots = f_r = 0$ で定義される $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の完全交叉とすると、(0.1) より Y は X の codim r の subvariety であることがわかる。Y の "primitive part" を Y_0 で表わすとき、次の問題を考える。

(1) $n=2r$ のとき、Y_0 の cohomology class $c(Y_0) \in H^n(X, \mathbb{Q})$ は nonzero か？

(2) $n=2r-1$ のとき、Y_0 の Abel-Jacobi map による像 $\alpha(Y_0) \in J^r(X)_{\mathbb{Q}}$ は nonzero か？

ここで $J^r(X)$ は、Griffiths の中間 Jacobi 多様体である。$n=2r$ のとき、[A], [A-S] において X が Fermat 多様体のときに、

特別なYについて調べられている。更に、Yが$\mathbb{P}^{n+1}$内のlinear spaceの場合はfが(0.1)の分解を持つことに注意しておく。

本論では、まず、§2においてXを射影空間内の完全交叉として問題(1)が肯定的に成り立つことを示す。次に§3において超曲面Xに対し、§1の結果を精密化する。最後に§4において問題(2)について考える。

§1. Preliminaries

本論では簡単の為$k=\mathbb{C}$としておくが、§2，§3の結果は任意の体k上で成り立つ。

Xを$\mathbb{C}$上のn次元代数多様体とし、$Z^p(X)$ $(0 \leq p \leq n)$をcodim pのsubvarietyのなすfree abel群とする。更にChow群を$CH^p(X) = Z^p(X)/\text{rat.eq.}$で表わす。この時、$CH^p(X)$から$H^{2p}(X,\mathbb{Q})$へのcycle map cがある：

$$c : CH^p(X) \longrightarrow H^{2p}(X,\mathbb{Q})$$

このkernelを$CH^p(X)_{hom}$と表わす。更に$CH^p(X)$の元で、代数的に0と同値なもの全体を$CH^p(X)_{alg.}$と表わす。明らかに$CH^p(X)_{alg} \subset CH^p(X)_{hom}$である。Griffiths群を次で定義する：

$$\mathrm{Griff}^p(X) = CH^p(X)_{hom} / CH^p(X)_{alg.}$$

$p=1$ ならば $\mathrm{Griff}^1(X)=0$ であるが $p\geqq 2$ ならば、一般に、$\mathrm{Griff}^p(X)\neq 0$ である。更に $\mathrm{Griff}^2(X)$ が有限生成でない例も知られている (cf. [C], [Sch])。しかし、一般的な結果はあまり知られてない。

さて、Griffiths の中間 Jacobi 多様体 $J^p(X)$ は次で定義される complex torus である (cf. [G1], [G2])。

$$J^p(X)=\left(F^{n-p+1}H^{2n-2p+1}(X,\mathbb{C})\right)^*\Big/H_{2n-2p+1}(X,\mathbb{Z})$$

このとき、$CH^p(X)_{hom}$ から $J^p(X)$ へ Abel-Jacobi map α が次のようにして与えられる：

$$\begin{array}{cccl}\alpha: & CH^p(X)_{hom} & \longrightarrow & J^p(X)\\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & Z & \longmapsto & \text{“}\omega\mapsto\int_\Gamma\omega\text{”}\quad(\omega\in F^{n-p+1}H^{2n-2p+1})\end{array}$$

ここで、Γ は $\partial\Gamma=Z$ なる $(2n-2r+1)$-chain である。$CH^p(X)_{alg}$ の α による像を $J^p_a(X)$ とおくと、$J^p_a(X)$ は Abel 多様体になることが知られている。更に、$J^p_h(X)=\alpha(CH^p(X)_{hom})$ とおくと、$J^p_h(X)/J^p_a(X)$ は countable であることが知られている。(See also [S2], [S3].)

§2 Complete intersections in a projective space.

この節では $n=2r$ としておく。$\mathbb{P}^{n+1}$ 内の超曲面を少し一般化して、X は $\mathbb{P}^{n+s}$ の中の codim $s\ (\geq 1)$ の完全交叉であるとしておく。その multidegree を $(m_1, \cdots, m_s)$ とする。更に、Y を X の codim r の subvariety で、Y は $\mathbb{P}^{n+s}$ の中では codim $r+s$ の完全交叉になっているものを考える。そして、その multidegree を $(d_1, \cdots, d_{r+s})$ とする。但し、自明な場合を除くため、次のことを仮定しておく。

$$
(2.1)\qquad \begin{aligned} & d_i \leqq m_j \quad (\forall i, j) \\ & \max_i \{d_i\} < \max_j \{m_j\} \end{aligned}
$$

Y の primitive part を Y_0 とおく。即ち、H を X の hyperplane section とするとき

$$
Y_0 = Y - \frac{\deg Y}{\deg X} H^r = Y - \frac{d_1 \cdots d_{r+s}}{m_1 \cdots m_s} H^r \in CH^r(X)_{\mathbb{Q}}
$$

とおく。この節の目標は次の定理の証明である。

<u>Theorem 2-1</u>　Y_0 の self-intersection number は次で計算される：$\Delta_i = \prod_{j \neq i} (m_i - m_j)$ とおくと、

$$
(-1)^r (Y_0^2) = d_1 \cdots d_{r+s} \sum_{i=1}^{s} \frac{\prod_{j=1}^{r+s} (m_i - d_j)}{\Delta_i m_i} .
$$

この値は正であり、従って特に、$c(Y_0) \neq 0$.

Th.2-1 の右辺は、$m_i \neq m_j$ ($\forall i \neq j$) でないと意味がないが、$m_1, \cdots, m_s$ を変数と見ると右辺の式は多項式になることがわかるので、その式に $m_1, \cdots, m_s$ の値を代入したと思うことにすると、常に成り立つ式である。

(証明) normal bundle の exact sequence

$$(2.2) \qquad 0 \longrightarrow N_{Y/X} \longrightarrow N_{Y/\mathbb{P}^{r+s}} \xrightarrow{\varphi} N_{X/\mathbb{P}^{r+s}}|_Y \longrightarrow 0$$

において、Chern polynomial を考えると、

$$C_t(N_{Y/X}) = C_t(N_{Y/\mathbb{P}^{r+s}}) \cdot C_t(N_{X/\mathbb{P}^{r+s}}|_Y)^{-1}$$

が成り立つ。ここで X, Y は $\mathbb{P}^{r+s}$ 内の完全交叉だから、

$$N_{Y/\mathbb{P}^{r+s}} \cong \bigoplus_{j=1}^{r+s} \mathcal{O}_Y(d_j),$$

$$N_{X/\mathbb{P}^{r+s}}|_Y \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_X(m_i)|_Y = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_Y(m_i).$$

従って、

$$C_t(N_{Y/X}) = C_t(\oplus \mathcal{O}_Y(d_j)) \cdot C_t(\oplus \mathcal{O}_Y(m_i))^{-1}$$

$$= \prod_j (1+d_j t) \cdot \prod_i (1+m_i t)^{-1}$$

ここで σ_ℓ $(0 \leq \ell \leq r+s)$ を $d_1, \cdots, d_{r+s}$ の ℓ 次の基本対称式とすると、$\prod_j (1+d_j t) = \sum_{\ell=0}^{r+s} \sigma_\ell t^\ell$。又、

$$\prod_i (1+m_i t)^{-1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i^{s-1}}{\Delta_i} \frac{1}{1+m_i t} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left(\sum_i \frac{m_i^{s-1+k}}{\Delta_i} \right) t^k$$

であるから

$$C_t(N_{Y/X}) = \left(\sum_{\ell} \delta_\ell t^\ell\right)\left(\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\left(\sum_i \frac{m_i^{s-1+k}}{\Delta_i}\right)t^k\right)$$

$$= \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\delta_\ell \sum_i \frac{m_i^{s-1+k-\ell}}{\Delta_i}\right)t^k$$

$$\therefore\quad C_r(N_{Y/X}) = \sum_{\ell=0}^{r}(-1)^{r-\ell}\delta_\ell \sum_i \frac{m_i^{r+s-1-\ell}}{\Delta_i}$$

ここで次のことが成り立つ.

Lemma 2-2

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{m_i^\nu}{\Delta_i} = \begin{cases} 0 & \cdots\cdots\ 0\leqslant \nu \leqslant s-2 \text{ のとき} \\ (-1)^{s-1}\sum\limits_{(e_1,\cdots,e_s)} m_1^{e_1}\cdots m_s^{e_s} & \cdots\cdots\ \nu \geqslant s-1 \text{ のとき 和は} \end{cases}$$

$e_i \geqslant 0,\ \sum e_i = \nu-s+1$
なる $(e_1,\cdots,e_s)$ 上を動く.
$\nu<0$ のとき 和は
$e_i \leqslant -1,\ \sum e_i = \nu-s+1$
なる $(e_1,\cdots,e_s)$ を動く.

$$\therefore\quad C_r(N_{Y/X}) = \sum_{\ell=0}^{r+s}(-1)^{r-\ell}\delta_\ell \sum_i \frac{m_i^{r+s-1-\ell}}{\Delta_i} - (-1)^s\delta_{r+s}\sum_i \frac{1}{\Delta_i m_i}$$

$$= \sum_i \frac{(-1)^r}{\Delta_i m_i}\sum_{\ell=0}^{r+s}(-1)^\ell \delta_\ell m_i^{r+s-\ell} - (-1)^{2s-1}\frac{\delta_{r+s}}{m_1\cdots m_s}$$

$$= (-1)^r\sum_i \frac{1}{\Delta_i m_i}\prod_{j=1}^{r+s}(m_i-d_j) + \frac{d_1\cdots d_{r+s}}{m_1\cdots m_s}$$

従って $i: Y \hookrightarrow X$ とすると.

$$(Y^2) = \deg i_*(C_r(N_{Y/X}))$$

$$= d_1\cdots d_{r+s}\left\{(-1)^r\sum_i \frac{1}{\Delta_i m_i}\prod_j (m_i-d_j) + \frac{d_1\cdots d_{r+s}}{m_1\cdots m_s}\right\}$$

$$\therefore \quad (Y_0{}^2) = \left(Y - \frac{d_1 \cdots d_{r+s}}{m_1 \cdots m_s} H^r\right)^2$$

$$= (Y^2) - 2 \cdot \frac{d_1 \cdots d_{r+s}}{m_1 \cdots m_s} (Y.H^r) + \left(\frac{d_1 \cdots d_{r+s}}{m_1 \cdots m_s}\right)^2 (H^r)^2$$

$$= (-1)^r d_1 \cdots d_{r+s} \sum_i \frac{1}{\Delta_i m_i} \prod_j (m_i - d_j)$$

この値が正になるということの以下の証明は R.Coleman による。

<u>Prop. 2-3</u>　実数 $d_1, \cdots, d_\mu$ を fix して,

$$G(t_1, \cdots, t_s) = \sum_{i=1}^{s} \frac{g(t_i)}{\Delta_i} \quad ,$$

とおく, ここで $g(t) = \frac{1}{\ast} \prod_{j=1}^{\mu} (t - d_j)$, $\Delta_i = \prod_{j \neq i} (t_i - t_j)$. このとき、$G(t_1, \cdots, t_s)$ は $t_1, \cdots, t_s$ の多項式であるが、実数 $m_1, \cdots, m_s$ で条件 (2.1) をみたすものに対して $G(m_1, \cdots, m_s) > 0$.

(証明) まず、次が成り立つことに注意する。

$$(2.3) \quad G(t_1, \cdots, t_s) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_s \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{s-2} & \cdots & t_s^{s-2} \\ g(t_1) & \cdots & g(t_s) \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_s \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{s-1} & \cdots & t_s^{s-1} \end{pmatrix}$$

実際,

$$\frac{1}{\Delta_i} = (-1)^{s-i} \det \begin{array}{c} \begin{matrix} & \overset{i}{\vee} & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \vdots & \cdots & 1 \\ t_1 & & \vdots & & t_s \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ t_1^{s-2} & & \vdots & & t_s^{s-2} \end{pmatrix} \end{array} \Big/ \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & & t_s \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{s-1} & \cdots & t_s^{s-1} \end{pmatrix}$$

であるから

$$\sum_i \frac{g(t_i)}{\Delta_i} = \sum_i (-1)^{s-i} g(t_i) \det \begin{array}{c} i \\ \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} \end{array} \Big/ \det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{s-1} & \cdots & t_s^{s-1} \end{bmatrix}$$

この右辺が求める式の右辺である。さて、次のLemmaを考える。

<u>Lemma 2-4</u> ([L]. Chap 9, Lemma 2.6)

$\varphi \in C^{(s-1)}(\mathbb{R})$, $t_1 < \cdots < t_s$ ($t_i \in \mathbb{R}$) とすると、$t_1 < \tau < t_s$ なる τ で次を満たすものが存在する。

$$\frac{\varphi^{(s-1)}(\tau)}{(s-1)!} = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & & t_s \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(t_1) & \cdots & \varphi(t_s) \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{s-1} & \cdots & t_s^{s-1} \end{pmatrix}$$

このLemmaと(2.3)より $G(t_1, \cdots, t_s) = \dfrac{g^{(s-1)}(\tau)}{(s-1)!}$ をみたす $\tau \in (t_1, t_s)$ があることがわかる。ところが、$t > \max\{d_j\}$ ならば常に $g^{(s-1)}(t) > 0$ となることが容易に示せる。従って、$\max\{d_j\} < t_1 < \cdots < t_s$ ならば $G(t_1, \cdots, t_s) > 0$ が言えた。極限を考えることにより、条件(2.1)の下で $G(m_1, \cdots, m_s) > 0$ となることを見るのは容易である。(Prop. 2-3 の証明終り)

以上のことから Theorem 2-1 が証明された。Q.E.D.

以上が Coleman による証明であるが、その後、別証が見つかったのでそれを述べる。

exact seq. (2.2) における $\varphi : N_{Y/\mathbb{P}^{r+s}} \longrightarrow N_{X/\mathbb{P}^{r+s}}|_Y$ は、ある $\tilde{\varphi} : \oplus \mathcal{O}_X(d_j) \longrightarrow \oplus \mathcal{O}_X(m_i)$ に対して $\tilde{\varphi}|_Y = \varphi$ となっている。

そこで

$$Y^{\#} = \{ x \in X \mid \tilde{\varphi}_x \text{ は surj. でない} \}$$

とおくと $Y^{\#}$ は X の subvariety である。$y \in Y$ に対しては $\tilde{\varphi}_y = \varphi_y$ は surj だから $Y \cap Y^{\#} = \emptyset$ である。

Claim : $\mathrm{codim}_X Y^{\#} = r$.

∵ X の定義方程式を $f_1 = f_2 = \cdots = f_s = 0$，$Y$ の定義方程式を $g_1 = \cdots = g_{r+s} = 0$ とすると

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{r+s} \end{pmatrix}, \quad (h_{ij}) : s \times (r+s) \text{ 行列.}$$

である。このとき明らかに

$$Y^{\#} = \{ x \in X \mid \mathrm{rank}(h_{ij}(x)) \leq s-1 \}$$

そこで.

$$W = \{ x \in \mathbb{P}^{r+s} \mid \mathrm{rank}(h_{ij}(x)) \leq s-1 \}$$

とおくと. $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^{r+s}} W \leq r+1$ である (cf.[F]). よって. $\mathrm{codim}_X Y^{\#} \leq r+1$. 更に.

$$Y^{\#} \subset W \cap \{ f_1 = \cdots = f_{s-1} = 0 \} = W \cap \{ f_1 = \cdots = f_s = 0 \} = Y^{\#}$$

であるから $\mathrm{codim}_X Y^{\#} \leq r$。一方 $\mathrm{codim}_X Y^{\#} \geq r$ は明らかだから $\mathrm{codim}_X Y^{\#} = r$.

さて．Hodge index theorem (cf. [W]) より．

$$(-1)^r(Y_0^2)>0 \iff c(Y_0)\neq 0$$
$$\iff c(Y)\neq \frac{\deg Y}{\deg X}c(H)^r.$$

もし．$c(Y)=\frac{\deg Y}{\deg X}c(H)^r$ とすると $(Y.Y^{\#})>0$．ところが $Y\wedge Y^{\#}=\phi$ だから $(Y.Y^{\#})=0$．従って．$c(Y)\neq\frac{\deg Y}{\deg X}c(H)^r$ でないといけない。従って．$(-1)^r(Y_0^2)>0$ である。(証明おわり)．

<u>Remark 2-5</u>　$s=1$ (i.e. $X\subset\mathbb{P}^{n+1}$：超曲面) のときは．$\deg Y^{\#}=\prod_{j=1}^{r+1}(m-d_j)$ だから Th'm 2-1 は次のようになる．

$$(-1)^r(Y_0^2)=\frac{\deg Y\cdot\deg Y^{\#}}{\deg X}$$

これが正となるのは当然である。一般の場合、このように書き表わせるのだろうか．

§3 Algebraic cycles on hypersurfaces (n=even)

この節では．X は $\mathbb{P}^{n+1}$ の中の次数 m の非特異超曲面を表わすものとする。自然数 r を．n が偶数のとき $n=2r$．n が奇数のとき $n=2r-1$ となるものとして定める。Y を X の subvar. で $\mathbb{P}^{n+1}$ の中で完全交叉になっているものをする。但し、$\mathrm{codim}_X Y = r$ なるものだけを考える。X の定義方程式を f．Y の定義方程式を $f_0, \cdots, f_r$ とすると、$Y \subset X$ より

$$f = \sum_{i=0}^{r} f_{i0} \cdots f_{i\nu_i} \quad (f_{i0} = f_i \quad i=0,\cdots,r)$$

となっている。この分解を fix して考える．

$$A = \{(a_0, \cdots, a_r) \mid a_i \in \mathbb{Z},\ 0 \leqq a_i \leqq \nu_i \ (i=0,\cdots,r)\}$$

とおき．各 $\alpha = (a_0, \cdots, a_r) \in A$ に対して．$f_{0a_0} = \cdots = f_{ra_r} = 0$ で定義される $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の完全交叉を Y_α で表わすことにすると、Y_α は X の codim r の alg. cycle になっている。

以下．$n=2r$ の場合を考える．$\deg f_{ij} = d_{ij}$ とおき．$d_\alpha = \deg Y_\alpha = \prod_i d_{ia_i}$ とおく。又．$\alpha = (a_0, \cdots, a_r)$, $\beta = (b_0, \cdots, b_r) \in A$ に対し、

$$I(\alpha, \beta) = \{ i \mid a_i = b_i \}$$

とおく。このとき．次が成り立つ。

<u>Theorem 3-1</u>　$\alpha, \beta \in A$ に対して、

$$(Y_\alpha . Y_\beta) = \frac{d_\alpha d_\beta}{m}\left\{1-(-1)^{\#I(\alpha,\beta)}\prod_{i\in I(\alpha,\beta)}\left(\frac{m}{d_{ia_i}}-1\right)\right\}$$

各 Y_α の primitive part を Y'_α とおく。即ち、$Y'_\alpha = Y_\alpha - \frac{d_\alpha}{m}H^r \in CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$、更に、

$$A' = \{(a_0, \cdots, a_r) \in A \mid 1 \leqslant a_i \leqslant \nu_i \ (\forall i)\}$$

とおく。このとき、次のことが Th'm 3-1 から導かれる。

<u>Cor. 3-2</u>　交点行列 $M = \left((-1)^r(Y'_\alpha . Y'_\beta)\right)_{\alpha,\beta\in A'}$ は正定値である。従って、$\{c(H)^r\} \cup \{c(Y'_\alpha) \mid \alpha \in A'\}$ は $H^n(X, \mathbb{Q})$ の中で独立である。特に、$\rho^{(r)}(X) \geqslant 1 + \nu_0\nu_1 \cdots \nu_r$。　ここで、$\rho^{(r)}(X)$ は X の中間次元の Picard 数を表わす。

(証明) Th'm 3-1 より次のことがわかる：　$0 \leqslant i \leqslant r$ に対して、

$$P_i = \begin{pmatrix} d_{i1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{i\nu_i} \end{pmatrix}, \quad M_i = P_i \begin{pmatrix} m/d_{i1}-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & m/d_{i\nu_i}-1 \end{pmatrix} P_i$$

とおくと、

$$M = M_0 \otimes M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$$

である。従って次の Lemma より各 M_i が正定値であることがわ

かるので、Mは正定値である。Q.E.D.

Lemma 3-3　$a_1,\cdots,a_n>0$, $\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1$ ならば行列 $\begin{pmatrix} a_1-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & a_n-1 \end{pmatrix}$ は正定値である。

(Th'm 3-1の証明)　$\#I(\alpha,\beta)$に関する帰納法で証明する。
まず、$\#I(\alpha,\beta)=0$ のとき。この時、$Y_\beta\subset Y_\alpha^{\#}$ であり、$Y_\alpha\cap Y_\alpha^{\#}=\phi$ だから $Y_\alpha\cap Y_\beta=\phi$. 従って、$(Y_\alpha.Y_\beta)=0$.となり $0=0$ で正しい。
次に、$\#I(\alpha,\beta)=k+1>0$ とし、$\#I\leq k$ ならば定理は正しいと仮定する。$\alpha=(a_0,\cdots,a_r)$, $\beta=(b_0,\cdots,b_r)$ としたとき、適当に成分を並べかえて、$a_i=b_i$ $(0\leq i\leq k)$ としてよい。そこで、$B=\{(a_0,\cdots,a_{k-1},b,a_{k+1},\cdots,a_r)\in A \mid 0\leq b\leq \nu_k\}$ とおくと、

$$Y_\alpha+\sum_{\substack{\gamma\in B\\ \gamma\neq\alpha}}Y_\gamma=\sum_{\gamma\in B}Y_\gamma \underset{\text{rat. eq.}}{\sim} \frac{d_\alpha}{d_{ka_k}}H^r$$

$$\therefore (Y_\alpha.Y_\beta)+\sum_{\substack{\gamma\in B\\ \gamma\neq\alpha}}(Y_\gamma.Y_\beta)=\frac{d_\alpha}{d_{ka_k}}(H^r.Y_\beta)=\frac{d_\alpha d_\beta}{d_{ka_k}}$$

ここで $\#I(\gamma,\beta)=k$ $(\gamma\in B, \gamma\neq\alpha)$ だから帰納法の仮定により、

$$(Y_\gamma.Y_\beta)=\frac{d_\gamma d_\beta}{m}\left\{1-(-1)^k\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{m}{d_{ia_i}}-1\right)\right\}$$

$$\therefore \sum_{\substack{\gamma \in B \\ \gamma \neq \alpha}} (Y_\gamma . Y_\beta) = \frac{d_\beta}{m}\Big(\sum_{\substack{\gamma \in B \\ \gamma \neq \alpha}} d_\gamma\Big)\left\{1-(-1)^k \prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{m}{d_{ia_i}}-1\right)\right\}$$

$$= \frac{d_\beta}{m}\cdot d_\alpha\left(\frac{m}{d_{ka_k}}-1\right)\left\{1-(-1)^k \prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{m}{d_{ia_i}}-1\right)\right\}$$

$$= \frac{d_\alpha d_\beta}{m}\left\{\frac{m}{d_{ka_k}}-1-(-1)^k\cdot \prod_{i=0}^{k}\left(\frac{m}{d_{ia_i}}-1\right)\right\}$$

$$\therefore (Y_\alpha . Y_\beta) = \frac{d_\alpha d_\beta}{d_{ka_k}} - \sum_{\substack{\gamma \in B \\ \gamma \neq \alpha}} (Y_\gamma . Y_\beta)$$

$$= \frac{d_\alpha d_\beta}{d_{ka_k}} - \frac{d_\alpha d_\beta}{m}\left\{\frac{m}{d_{ka_k}}-1-(-1)^k \prod_{i=0}^{k}\left(\frac{m}{d_{ia_i}}-1\right)\right\}$$

$$= \frac{d_\alpha d_\beta}{m}\left\{1-(-1)^{k+1} \prod_{i=0}^{k}\left(\frac{m}{d_{ia_i}}-1\right)\right\}.$$

よって. $\# I(\alpha . \beta) = k+1$ のときも定理は正しい。　　　Q.E.D.

<u>Cor 3-3</u>　Y_α , Y_β が linear space (i.e. $d_\alpha = d_\beta = 1$) のとき

$$(Y_\alpha . Y_\beta) = \frac{1}{m}\left\{1-(1-m)^{\dim Y_\alpha \cap Y_\beta + 1}\right\}$$

(証明)　$\# I(\alpha . \beta) = \dim Y_\alpha \cap Y_\beta + 1$ であることより従う。但し、$Y_\alpha \cap Y_\beta = \phi$ のときは $\dim Y_\alpha \cap Y_\beta = -1$ としておく。　Q.E.D.

§4. Algebraic cycles on hypersurfaces (n = odd)

まず，次のような一般的な状況で考える (cf. [Z1], [Z2]).

$\overline{X}$: smooth proj. var., $\dim \overline{X} = n$

$\overline{S}$: smooth proj. curve.

$\overline{f} : \overline{X} \to \overline{S}$: projective morphism, smooth over a Zariski open set $S \subset \overline{S}$

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \overline{X} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}} \\ S & \xhookrightarrow{j} & \overline{S} \end{array}$$

$\Sigma = \overline{S} - S$.

$\overline{X}_s$: normal crossing divisor となっている. ($\forall s \in \Sigma$)

$\pi : J^p(X/S) \to S$: p-th intermediate Jacobian の family

$\mathcal{F}^p = R^i f_* F^p \Omega^{\bullet}_{X/S}$: Hodge filtration bundle.

$\mathcal{J}^p = J^p(X/S) \to S$ の hol. section のなす sheaf.

このとき，exact seq.

$$0 \to R^{2p-1} f_* \mathbb{Z}/\mathrm{tor.} \longrightarrow \mathcal{F}^{p*} \longrightarrow \mathcal{J}^p \longrightarrow 0$$

より long exact seq.

$$\cdots \to H^0(S, \mathcal{F}^p) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{J}^p) \xrightarrow{\delta} H^1(S, R^{2p-1} f_* \mathbb{Z}/\mathrm{tor}) \to -$$

が得られる。$H^0(S, \mathcal{J}^p)$ の元 ν を normal function という。さて，

$$\Theta^p(X/S) = \left\{ Z \in \mathcal{Z}^p(\overline{X}) \;\middle|\; Z.X_s \overset{\mathrm{hom.}}{\sim} 0 \quad \forall s \in S \right\}$$

とおくと，$Z \in \Theta^p(X/S)$ に対し，Z に付随する normal function $\nu_Z \in H^0(S, \mathcal{J}^p)$ が次のように定義される：

$$\nu_Z(s) = \alpha(Z.X_s) \in J^p(X_s), \quad s \in S$$

このとき、次の可換図式がある。(cf. [Z1], [Z2], [K])

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Z}^p(\bar{X}) \supset \Theta^p(X/S) & \xrightarrow{\text{"Abel-Jacobi"}} & H^0(S, \mathcal{J}^p) \\
c \Big\downarrow \text{cycle map} & & \Big\downarrow \delta \\
H^{2p}(\bar{X}, \mathbb{Q}) & & H^1(S, R^{2p-1}f_*\mathbb{Q}) \\
\cup & & \wr\| \\
\mathrm{Prim}^{2p}_{\Sigma}(\bar{X}, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\text{Griff}} & H^1(\bar{S}, R^{2p-1}\bar{f}_*\mathbb{Q})
\end{array}$$

ここで、

$$\mathrm{Prim}^{2p}_{\Sigma}(\bar{X}, \mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}\left\{ \mathrm{Prim}^{2p}(\bar{X}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \bigoplus_{s \in \Sigma} H^{2p}(\bar{X}_s, \mathbb{Q}) \right\}$$

<u>Theorem 4-1</u>　上の状況において、Griffiths map (Prim_Σ への制限)

$$\mathrm{Griff} : \mathrm{Prim}^{2p}_{\Sigma}(\bar{X}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^1(\bar{S}, R^{2p-1}\bar{f}_*\mathbb{Q})$$

は injective である。

(証明) local invariant cycle theorem ([Z2]) より

$R^i\bar{f}_*\mathbb{Q} \longrightarrow j_*R^if_*\mathbb{Q}$ は surjective である。そこで、

$$K^n = \mathrm{Ker}\{ R^n\bar{f}_*\mathbb{Q} \to j_*R^nf_*\mathbb{Q} \}$$

とおくと、K^n は Σ に support をもつ。よって、$H^0(\bar{S}, K^n) \subset \bigoplus_{s\in\Sigma} H^n(\bar{X}_s, \mathbb{Q})$、さて、Leray spectral seq

$$E_2^{p,q} = H^p(\bar{S}, R^q\bar{f}_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^{p+q}(\bar{X}, \mathbb{Q})$$

は E_2 で退化するから $E_2^{1,n-1} = gr_L^1 H^n(\bar{X}, \mathbb{Q})$. ここで L は Leray filtration.

$$L^1H^n(\bar{X}, \mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}\{H^n(\bar{X}, \mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H^0(\bar{S}, R^n\bar{f}_*\mathbb{Q})\}$$

であり,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H^0(\bar{S}, K^n) & \to & H^0(\bar{S}, R^n\bar{f}_*\mathbb{Q}) & \to & H^0(\bar{S}, j_*R^n f_*\mathbb{Q}) & \to 0 \\ & \cap & & & & \wr\!\wr & \\ & \bigoplus_{s\in\Sigma} H^n(\bar{X}_s, \mathbb{Q}) & & & & H^0(S, R^n f_*\mathbb{Q}) & \\ & & & & & \wr\!\wr & \\ & & & & & H^n(X_t, \mathbb{Q}) \quad \forall t\in S & \end{array}$$

であるから,

$$\begin{aligned} L^1H^n(\bar{X}, \mathbb{Q}) &\supset \mathrm{Ker}\{H^n(\bar{X}, \mathbb{Q}) \to H^n(X_t, \mathbb{Q}) \oplus \bigoplus_{s\in\Sigma} H^n(\bar{X}_s, \mathbb{Q})\} \\ &= \mathrm{Prim}_\Sigma^n(\bar{X}, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

更に, $L^2H^n(\bar{X}, \mathbb{Q}) \cong E_2^{2,n-2} = H^2(\bar{S}, R^{n-2}\bar{f}_*\mathbb{Q})$

$$\begin{aligned} &\simeq H^2(\bar{S}, j_*R^{n-2}f_*\mathbb{Q}) \\ &\simeq H^2(S, R^{n-2}f_*\mathbb{Q}) \\ &\simeq H^{n-2}(X_t, \mathbb{Q}) \quad \forall t\in S \end{aligned}$$

であり, $H^{n-2}(X_t, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^n(\bar{X}, \mathbb{Q})$ は Gysin map による inclusion である。以上により,

$$H^1(\bar{S}, R^{n-1}\bar{f}_*\mathbb{Q}) = \frac{\mathrm{Ker}\{H^n(\bar{X}, \mathbb{Q}) \to H^0(\bar{S}, R^n\bar{f}_*\mathbb{Q})\}}{\mathrm{Im}\{H^{n-2}(X_t, \mathbb{Q}) \to H^n(\bar{X}, \mathbb{Q})\}} \hookleftarrow \mathrm{Prim}_\Sigma^n(\bar{X}, \mathbb{Q})$$

この埋め込み $\mathrm{Prim}_\Sigma^n(\bar{X}, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(\bar{S}, R^{n-1}\bar{f}_*\mathbb{Q})$ は Griffiths map の制限である. Q.E.D.

さて、少し特別な場合を考えよう。V, W を smooth. proj. var. で $\dim V = \dim W - 1$ となるもので次の仮定をみたすものとする：

W 上に hyperplane section の pencil $\{W_t\}$ が与えてあり、generic な $t \in \mathbb{P}^1$ に対して W_t は V と同型（$\varphi_t : W_t \xrightarrow{\sim} V$ とする）。

Δ でこの pencil の軸を表わすとき、

$$\textcircled{H}^p_\Delta(W) = \left\{ Z \in \mathcal{Z}^p(W) \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{supp} Z \not\subset W_t \ (\forall t \in \mathbb{P}^1) \\ \operatorname{supp} Z \text{ は } \Delta \text{ と transversal に交わり} \\ Z.W_t \underset{hom}{\sim} 0 \text{ in } W_t \ (\forall t \in \mathbb{P}^1) \end{array} \right\}$$

とおく。更に、合成写像

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{H}^p_\Delta(W) & \xrightarrow{\cdot W_t} & CH^p(W_t)_{hom} & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{t*}} & CH^p(V)_{hom} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ Z & \longmapsto & Z.W_t & \longmapsto & \varphi_t(Z.W_t) \end{array}$$

を ψ_t で表わす。このとき、次が成り立つ。

Prop. 4-2 generic な $t \in \mathbb{P}^1$ に対して

$$\operatorname{Ker}(\alpha \circ \psi_t) = \{ Z \in \textcircled{H}^p_\Delta(W) \mid c(Z) = 0 \text{ in } H^{2p}(W, \mathbb{Q}) \}.$$

従って、この右辺を $\textcircled{H}^p_\Delta(W)_{hom}$ とおけば、

$$\psi_t\left(\textcircled{H}^p_\Delta(W) / \textcircled{H}^p_\Delta(W)_{hom} \right) \xhookrightarrow{\alpha} J^p(V).$$

（証明）Δ を中心とする W の blow-up を $\pi : \widehat{W} \to W$ とする。このとき、次の可換図式がある。

$$
\begin{tikzcd}
\Theta^p_\Delta(W) \arrow[r, hook, "\pi^*"] \arrow[d, "c"] & \Theta^p(\widetilde{W}/\mathbb{P}^1) \arrow[r, "A\text{-}J."] \arrow[d, "c"] & H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{J}^p) \arrow[d, "\delta"] \\
H^{2p}(W,\mathbb{Q}) \arrow[r, hook, "\pi^*"] & H^{2p}(\widetilde{W},\mathbb{Q}) & H^1(\mathbb{P}^1, R^{2p-1}f_*\mathbb{Q}) \\
& \cup \\
& \mathrm{Prim}^{2p}_\Sigma(\widetilde{W},\mathbb{Q}) \arrow[uur, hook, "\mathrm{Griff}"']
\end{tikzcd}
$$

ここで
$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[d, dashed] & \widetilde{W} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, "f"] \\
\mathbb{P}^1
\end{tikzcd}
$$
とおいた。従って、generic な $t\in\mathbb{P}^1$ に対し、

$$u\circ\Psi_t : \Theta^p_\Delta(W) \longrightarrow J^p(V)$$

の kernel は $\Theta^p_\Delta(W)_{hom}$ であることがわかる。 Q.E.D.

Cor 4-3 $V\subset\mathbb{P}^{n+1}$ は $f=0$ で定義される超曲面で、V の次数 $=m$, 次元 $=n=2r-1$ とする。更に f は次の条件を満たすとする：

(i) $f = h(x_0,\dots,x_n) + x_{n+1}^m = \sum_{i=0}^{r} f_{i0}\cdots f_{ir_i}$ なる分解をもつ。

(ii) $f_{ij} = g(x_0,\dots,x_n, ux_{n+1}, vx_{n+1})$, $u^m+v^m=1$

for some $g\in\mathbb{C}[x_0,\dots,x_{n+1},x_{n+2}]$.

(iii) $x_{n+1} \notin (f_{0a_0},\dots,f_{ra_r})$ $\forall(a_0,\dots,a_r)\in A$.

このとき、$\{Y'_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ は Abel-Jacobi map α で injective にうつされる。

(証明) Prop. 4-2 において、

$$W = \{ f_h(x_0, \cdots, x_n) + x_{n+1}^m + x_{n+2}^m = 0 \} \subset \mathbb{P}^{n+2}$$

$$W_t = \{ f_h + (1+t^m) x_{n+1}^m = 0 \} \qquad (x_{n+2} = t x_{n+1})$$

とおく．このとき．Y_α' $(\alpha \in A')$ は $\Psi_t(\Theta_\Delta^r(W)/\Theta_\Delta^r(W)_{hom})$ の中で独立である（Thm 3-1）．従って Prop. 4-2 より上の主張が得られる。 Q.E.D.

<u>Remark 4-4</u> Cor 4-3 は Inductive Structure (cf [K-S], [S1]) を用いても証明できる．更に．Cor 4-3 における V 上の cycle は代数的に同値でないと思われる．これが示されれば $\operatorname{rank} \operatorname{Griff}^r(V) \geqq \nu_0 \nu_1 \cdots \nu_r$ となることが言える。

References

[A] Aoki, N.: Some new algebraic cycles on Fermat varieties J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 385–396.

[A-S] Aoki, N. and Shioda, T.: Generators of the Néron-Severi group of a Fermat surface. Progress in Math. 35, Birkhäuser.

[C] Clemens, H.: Homological equivalence, modulo algebraic equivalence, is not finitely generated. Publ. Math. I.H.E.S. 58 (1983), 19–38.

[G1] Griffiths, P.: Some results on algebraic cycles on algebraic manifolds. In "Alg. Geom., Proc. Tata Conf.", 1968 Oxford Univ. Press (1969), 93–191.

[G2] ———— : On the periods of certain rational integrals I. II, Ann. Math. 90 (1969), 460–541.

[K] Katz, N.: Le théorème de Griffiths, Exp. XX, SGA 7 II, S.L.N. 340 (1973), 341–362.

[K-S] Katsura, T. and Shioda, T.: On Fermat varieties. Tohoku Math. J. 31 (1979), 97–115.

[L] Lang, S.: Fundamentals of Diophantine Geometry. Springer-Verlag, New-York (1983).

[Sch] Schoen, C. : Complex multiplication cycles on elliptic modular threefolds, Duke Math. J. 53 (1986), 771–794.

[S1] Shioda, T. : The Hodge conjecture for Fermat varieties. Math. Ann. 245 (1979), 175–184.

[S2] —, A note on a theorem of Griffiths on the Abel-Jacobi map, Inv. Math. 82 (1985). 461–465.

[S3] —, Algebraic cycles on hypersurfaces in $\mathbb{P}^N$. Adv. Stdies. in Pure Math. 10 (1987), 717–732

[W] Weil, A. : Variétés Kähleriennes, Hermann, Paris (1958)

[Z1] Zucker, S. : Intermediate Jacobians and normal functions, in "Topics transcendental algebraic geometry" Ann. Math. Study 106. (1984), 259–267.

[Z2] —— , : Hodge theory with degenerating coefficients : L_2 cohomology in the Poincaré metric. Ann. Math. 109 (1979), 415–476